Probabilidades y Estadística (M)

Clase 21/04/2016.
Vectores Aleatorios Continuos. Estadísticos de Orden. Cambio de Variable

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio cuya función de densidad conjunta es

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & 0 \leq x;\ 0 \leq y \leq x^2 \\ \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

   (a) Hallar $\mathbb{P}\left[(X,Y) \in (1,2) \times (2,4)\right]$.
   (b) Hallar f_X, f_Y.
   (c) Decidir si X e Y son independientes.
   (d) Calcular $\mathbb{P}\left[X - Y = 0\right]$.
   (e) Sea $Z \sim U_{[0,1]}$, independiente de Y. Calcular $\mathbb{P}\left[4Z \leq Y\right]$.

2. Sea U_1, U_2, U_3 variables aleatorias uniformes en $[0, 1]$, independientes entre sí. Calcular la función de densidad de

$$R = \max\{U_1, U_2, U_3\} - \min\{U_1, U_2, U_3\}.$$

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio cuya función de densidad conjunta es

$$f_{XY}(x,y) = 2xe^{-x^2}\mathbf{I}_{(0,x^2)}(y)\mathbf{I}_{(0,+\infty)}(x)$$

   Sea $U = X^2 - Y$, $V = Y$.

   (a) Hallar la función de densidad conjunta f_{UV} ¿Son U y V independientes?
   (b) Hallar $\mathbb{P}\left[\max\{X^2, 2Y\} \leq Y + 2\right]$.
   (c) Sea T una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0, 1]$, independiente de X e Y. Hallar $\mathbb{P}\left[T > 2Y\right]$.

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \leq x \leq y \\ \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

   (a) Represente en el plano el soporte de la densidad.¿Son X e Y independientes?
   (b) Hallar $\mathbb{P}\left[X \geq 3\right]$.
   (c) Hallar $\mathbb{P}\left[Y \leq 5 | X \geq 3\right]$.
   (d) Hallar la función de densidad de Y.
   (e) Hallar la función de densidad de la variable $Z = X + Y$.

Esperanza y varianza de variables aleatorias discretas

5. Los hoteles aceptan reservas en número mayor a su capacidad para minimizar pérdidas debido a las personas que no se presentan. Los registros de un hotel muestran que en promedio el 20% de los huéspedes no se presentan. Un hotel tiene 22 habitaciones y ha aceptado 25 reservas para un día.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los huéspedes con reserva previa que se presenten en dicho día, obtengan la habitación?

   (b) ¿Cuál es la esperanza del número de huespedes que se queda sin habitación? ¿Y la varianza?

   (c) ¿Cuál es el número esperado de huéspedes que se presentan?

   (d) El hotel tiene un gasto fijo de \$ 5000 por día, y cobra por habitación \$1000 la noche. ¿Cuál es la ganancia que se espera tener en una noche?

6. (Aggiornado) Un grupo de n personas decide jugar al amigo invisible: el organizador escribe los nombres de todos los participantes en unos papelitos y los introduce en una bolsa. Luego, uno por uno, van introduciendo la mano y retirando un papelito al azar. Sea X el número de personas a las que les toca el papelito con su nombre. Calcular la esperanza y la varianza de la variable X.